Das gewichtete Mittel

Ein forschender Geist wird Messungen nicht nur wiederholen, sondern auch die Messbedingungen abändern, um Hypothesen wie eine Proportionalität zu überprüfen. Unterschiedliche Bedingungen führen aber zumeist zu unterschiedlichen Unsicherheiten und damit zu unterschiedlichen Präzisionen der einzelnen Messungen. Daher werden den Messwerten unterschiedliche Gewichte zugeordnet. Dies ist Anlass genug um sich an die wesentlichen Eigenschaften des gewichteten Mittelwerts zu erinnern.

Wenn die n reellen Daten $(x_1, x_2 \dots x_n)$ Messwerte einer gesuchten Größe darstellen, dann ist ein erwartungstreuer Schätzwert durch jeden gewichteten Mittelwert mit den positiven Gewichten w_i gegeben.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \quad \text{mit} \quad \sum_i w_i = 1 \tag{1}$$

Nun stellt sich die Frage nach der optimalen Wahl der Gewichte. Optimal wäre eine Wahl, wenn dadurch die Varianz des Mittelwerts minimal wird. Mit der “Fehlerfortpflanzung nach Gauß” würde sich die Varianz des Mittelwertes zu

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_i w_i^2 \sigma_i^2$$

berechnen. Dabei ist σ_i^2 die Varianz des i–ten Wertes. Durch Verwendung der “Cauchy–Schwarz–Ungleichung” kann für diese Varianz des Mittelwertes eine untere Schranke angegeben werden:

$$\sum_i w_i^2 \sigma_i^2 \cdot \sum_i \sigma_i^{-2} \geq \left(\sum_i w_i \sigma_i \sigma_i^{-1} \right)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_i w_i^2 \sigma_i^2 \geq \frac{1}{\sum_i \sigma_i^{-2}}$$

Die kleinste Varianz des Mittelwertes ergibt sich also bei Gewichten, welche proportional zu den reziproken Varianzen sind:

$$w_i = \frac{\sigma_i^{-2}}{\sum_k \sigma_k^{-2}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{\sum_i \sigma_i^{-2}} \tag{2}$$

Hier sei angemerkt, dass ein unbekannter Proportionalitätsfaktor bei den einzelnen Varianzen auf die Gewichte und damit auf den Mittelwert keinen Einfluss hat, die Varianz des Mittelwertes aber unbestimmt bleibt. Um so einen Proportionalitätsfaktor zu bestimmen, muss eine Annahme über die Form der Verteilung gemacht werden. Gerne wird von einer Rechteckverteilung ausgegangen, die durch die Auflösung des Messgerätes motiviert ist. So weist eine Rechteckverteilung der Breite b mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1/b & \text{falls } |x| < b/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Varianz $\sigma^2 = b^2/12$ auf.

Aus solchen Unkenntnissen heraus muss die Varianz des Mittelwertes häufig geschätzt werden. Um so eine Abschätzung zu motivieren, wird von der gewichteten Abweichungsquadratsumme $\sum w_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2$ ausgegangen.

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(1 - w_i\right) x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \neq i} w_i x_i w_k x_k$$

Beim Übergang zu den Erwartungswerten, welche durch spitze Klammern gekennzeichnet sind, folgt zunächst:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} w_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(1 - w_i\right) \left\langle x_i^2 \right\rangle - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \neq i} w_i \left\langle x_i \right\rangle w_k \left\langle x_k \right\rangle$$

Da die Erwartungswerte der einzelnen Messwerte gleich sein sollen und die Summe der Gewichte gleich eins ist, ergibt sich schließlich:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} w_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(1 - w_i\right) \left(\left\langle x_i^2 \right\rangle - \left\langle x_i \right\rangle^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(1 - w_i\right) \sigma_i^2$$

Einsetzen der oben angegebenen Gewichte (2) führt auf:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{-2} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \right\rangle = n - 1$$

Diese Beziehung ist eine Hilfestellung, um die Plausibilität der gewählten Varianzen zu untermauern. Die Summe auf der linken Seite wird in der Literatur χ^2 genannt, wogegen die rechte Seite die Zahl der Freiheitsgrade angibt.
Andererseits gilt aber auch:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n-1} \left\langle \sum_{i=1}^{n} w_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \right\rangle \tag{3}$$

Damit ist ein erwartungstreuer Schätzwert für die Varianz des gewichteten Mittelwertes gegeben. Hier sind einige Anmerkungen angebracht:

- Da zumeist die Standardabweichung als Maß für die Unsicherheit angegeben wird, sei erwähnt, dass die Wurzel aus (3) zwar einen Schätzwert für die Standardabweichung liefert, dieser im Allgemeinen jedoch nicht erwartungstreu ist.
- Ist die Auflösung, mit der die Messergebnisse erzielt werden, ungünstig, dann darf es nicht wundern, dass die nach (3) berechnete Varianz viel zu klein ist oder ganz verschwindet.
- Wie das Zustandekommen von (3) zeigt, ist eine notwendige Voraussetzung die Gleichheit der Erwartungswerte. Soll der Mittelwert lediglich einen Durchschnitt angeben, dann ist (3) kein verlässlicher Schätzer für die Varianz. Auch werden bei Vorliegen von systematischen Fehlern diese Voraussetzungen nicht erfüllt sein.
- Unter der Annahme, dass alle Einzelvarianzen gleich sind, kann mit (3) die Varianz des gleichgewichteten Mittelwertes durch

  $$\frac{1}{n\left(n-1\right)} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

  abgeschätzt werden.

Um das Gesagte zu verdeutlichen, soll eine Bestimmung der Erdbeschleunigung mit einem "mathematischen Pendel" besprochen werden. Die Länge l des Pendels und die Periodendauer T können relativ leicht gemessen werden. Dabei ist es sinnvoll, die Zeit für zehn volle Schwingungen zu ermitteln. Die Unsicherheiten der Länge und der Periodendauer werden auf $\Delta l = 0.01\,\mathrm{m}$ und $\Delta T = 0.02\,\mathrm{s}$ geschätzt. Der große Vorteil eines gewichteten Mittelwertes im Vergleich zu einem "Ausgleich funktionaler Zusammenhänge mit der Methode der kleinsten Quadrate" liegt nun darin, dass diese Unsicherheiten bei der Bestimmung der Unsicherheit der Erdbeschleunigung direkt berücksichtigt werden. Das mathematische Pendel liefert dann für die Erdbeschleunigung g den Wert

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

mit der zugehörigen Unsicherheit, die sich mittels "Fehlerfortpflanzung nach Gauß" zu

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{T^3}\sqrt{(T\Delta l)^2 + (2l\Delta T)^2}$$

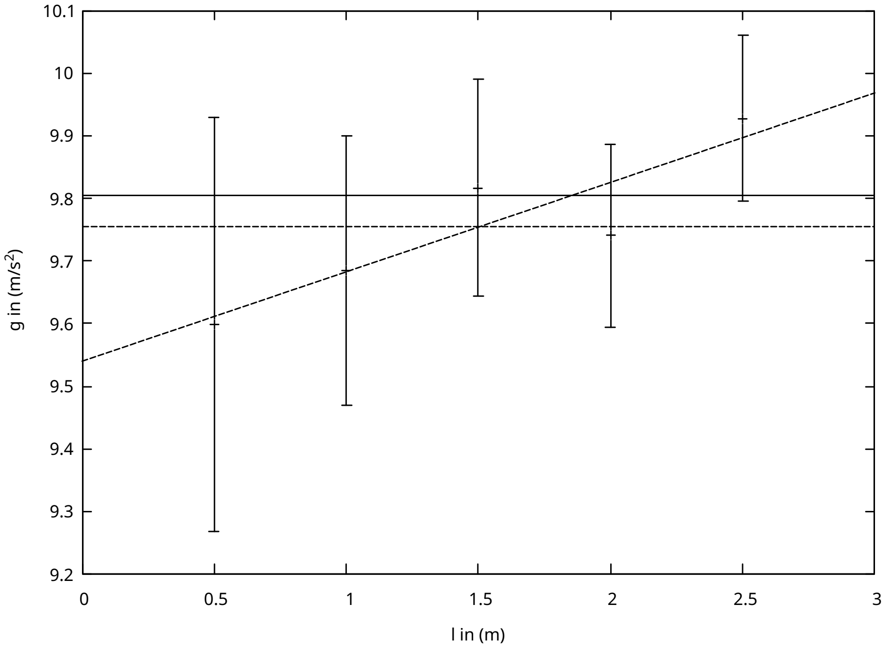
ergibt. Die Messergebnisse und die berechneten Erdbeschleunigungen sind in der folgenden Tabelle angegeben.

l	T	g
$(0.50 \pm 0.01)\,\mathrm{m}$	$(1.434 \pm 0.020)\,\mathrm{s}$	$(9.599 \pm 0.330)\,\mathrm{m/s^2}$
$(1.00 \pm 0.01)\,\mathrm{m}$	$(2.019 \pm 0.020)\,\mathrm{s}$	$(9.685 \pm 0.215)\,\mathrm{m/s^2}$
$(1.50 \pm 0.01)\,\mathrm{m}$	$(2.456 \pm 0.020)\,\mathrm{s}$	$(9.817 \pm 0.173)\,\mathrm{m/s^2}$
$(2.00 \pm 0.01)\,\mathrm{m}$	$(2.847 \pm 0.020)\,\mathrm{s}$	$(9.741 \pm 0.146)\,\mathrm{m/s^2}$
$(2.50 \pm 0.01)\,\mathrm{m}$	$(3.153 \pm 0.020)\,\mathrm{s}$	$(9.928 \pm 0.132)\,\mathrm{m/s^2}$

Für die Erdbeschleunigung liefert die Mittelung nach (2):

$$\bar{g} = (9.805 \pm 0.077)\,\mathrm{m/s^2}$$

Dagegen würde die Mittelung bei gleichen Gewichten, also ohne Berücksichtigung der Einzelvarianzen, $(9.754 \pm 0.057)\,\mathrm{m/s^2}$ ergeben.



Die eingezeichnete Trendlinie lässt vermuten, dass ein systematischer Fehler vorliegt. Damit wird die Berechnung der Unsicherheit mittels (3) fragwürdig. So eine Berechnung würde den Wert $\pm 0.052\,\mathrm{m/s^2}$ ergeben.