

## Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebiges Dreieck spitzwinklig?

Johannes Barton, Wien 2010

Um diese Frage zu beantworten, geben wir eine von mehreren möglichen Konstruktionsvorschriften für beliebige Dreiecke an:

Wir zeichnen einen Winkel  $\alpha$  als jenen Winkel, der durch zwei Strahlen gegeben ist. Dieser Winkel sei zwischen 0 und 180 Grad gleichverteilt. Als Ausgangspunkt eines dritten Strahls wählen wir einen beliebigen Punkt auf dem zweiten Strahl, und zeichnen den dritten Strahl so "nach innen", dass ein Dreieck entsteht. Dieses Dreieck wird nur dann beliebig sein, wenn der Winkel  $\beta$ , der durch den zweiten und den dritten Strahl gegeben ist, zwischen 0 und  $180 - \alpha$  gleichverteilt ist. – Hier kommt eine "bedingte Wahrscheinlichkeit" ins Spiel. Da die Winkelsumme im Dreieck 180 Grad beträgt, ist auch der dritte Winkel  $\gamma$  festgelegt. Demnach können wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe der Dichtefunktion

$$p(\alpha, \beta) = p(\alpha) \cdot p(\beta | \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{180} \cdot \frac{1}{180 - \alpha} & \text{für } 0 < \alpha < 180 \text{ und } 0 < \beta < 180 - \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und einem Doppelintegral der Form

$$\int \int p(\alpha) \cdot p(\beta | \alpha) \cdot d\beta \cdot d\alpha$$

beantworten. Um die Integrationsgrenzen zu bestimmen, stellen wir fest, dass für ein spitzwinkliges Dreieck auch der Winkel  $\gamma$  kleiner als 90 Grad sein muss.

$$180 - \alpha - \beta = \gamma < 90 \quad \implies \quad 90 - \alpha < \beta$$

Unsere Konstruktionsvorschrift liefert also ein spitzwinkliges Dreieck, wenn die beiden Beziehungen  $0 < \alpha < 90$  und  $90 - \alpha < \beta < 90$  gelten. So berechnen wir die Wahrscheinlichkeit für ein spitzwinkliges Dreieck zu:

$$P(\text{spitz}) = \int_0^{90} \int_{90-\alpha}^{90} \frac{1}{180} \cdot \frac{1}{180 - \alpha} \cdot d\beta \cdot d\alpha = \frac{1}{180} \cdot \int_0^{90} \frac{\alpha}{180 - \alpha} \cdot d\alpha = \ln(2) - \frac{1}{2} \approx 19.3\%$$

Anmerkungen:

- Konstruktionsvorschriften, die von drei zufällig gewählten Punkten in einer unendlichen Ebenen ausgehen, sind widersprüchlich, da sich schon auf einem unendlichen Intervall keine Gleichverteilung konstruieren lässt.
- Konstruktionsvorschriften, die von der längsten Seite eines Dreiecks ausgehen, sind sinnlos, da die Kenntnis der längsten Seite die Kenntnis der beiden anderen Seiten voraussetzt, und daher das Dreieck vollständig determiniert wäre.
- Lösungen, die nur Symmetrieüberlegungen beinhalten, sind sehr reizvoll, lassen jedoch Konstruktionsvorschriften vermissen, sodass nicht geklärt wäre, wie denn ein beliebiges Dreieck zu zeichnen sei. Eine solche Symmetrieüberlegung wäre folgende: Ein stumpfwinkliges Dreieck hat genau einen Winkel größer als 90 Grad. Für diesen stehen drei Eckpunkte als Möglichkeiten offen. Ein spitzwinkliges Dreieck hat keinen Winkel größer als 90 Grad, sodass in diesem Fall eine weitere, aber eben nur eine Möglichkeit zu berücksichtigen ist. Sind nun alle Winkel gleichwahrscheinlich, dann auch diese vier Möglichkeiten, sodass  $P(\text{spitz}) = 25\%$  sein sollte. Das wäre eine Argumentation, die gänzlich ohne den Begriff der "bedingten Wahrscheinlichkeit" auskommt.