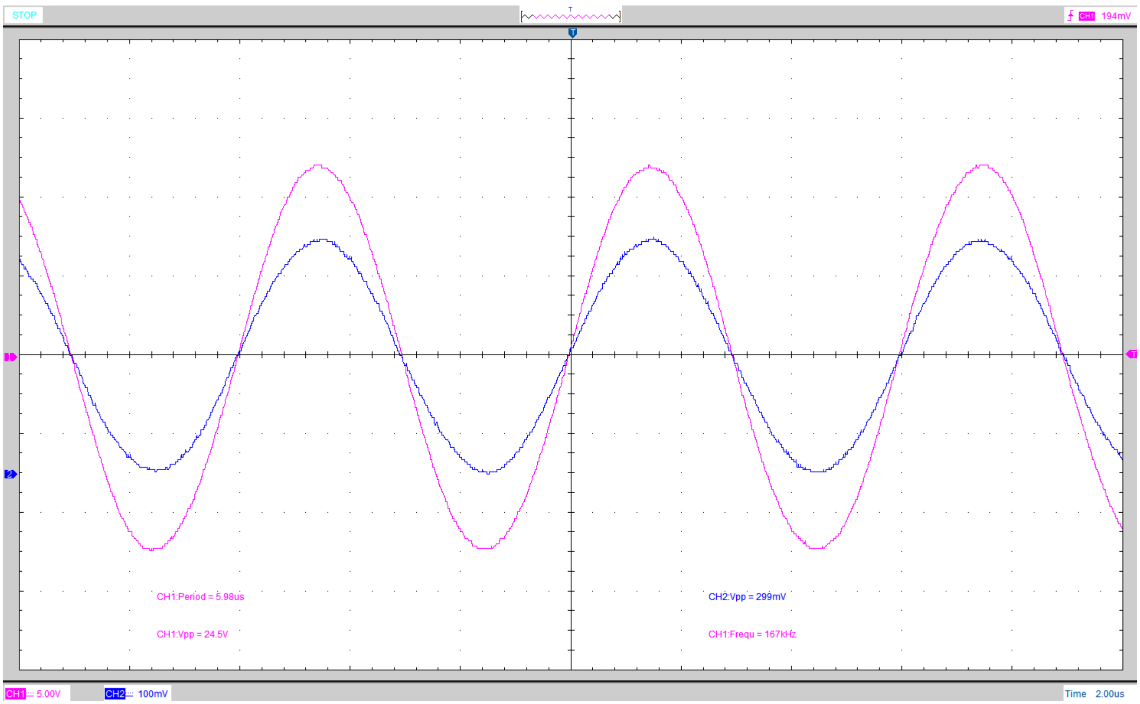
Die Impedanz einer Luftspule

Johannes Barton, Wien 2020

Obwohl eine Luftspule ein relativ einfaches Bauteil ist, kann ihr Wechselstromverhalten einige merkwürdige Eigentümlichkeiten aufweisen, die sie deutlich von einer idealen Induktivität unterscheiden. Dies liegt einerseits an frequenzabhängigen Verlustwiderständen, welche dielektrische Verluste der Isolation, durch Skin– und Proximity–Effekt erhöhte Leitungsverluste oder auch Verluste durch elektromagnetische Abstrahlung beschreiben. Andererseits treten Kapazitäten auf, die durch die gegenseitige Lage der einzelnen Windungen gegeben sind, sodass die Spule eine Abfolge von Parallel– und Serienresonanzen zeigen kann [1].
In diesem Artikel wird die Impedanz einer Luftspule der Firma PHYWE mit der Katalognummer 06514.00 speziell in Hinsicht auf Resonanzen untersucht. Die Nenndaten dieser Spule lauten: 600 Windungen, eine Induktivität von 9 mH und ein 2.5 Ω Gleichstromwiderstand.
Um die oben erwähnten Resonanzen aufzuspüren, wird eine Serienschaltung bestehend aus Spule und Messwiderstand mit einem Generator variabler Frequenz betrieben. Mit einem Oszilloskop kann dann die Gesamtspannung mit der Spannung am Messwiderstand verglichen werden. Weisen die beiden Spannungen keine Phasenverschiebung auf, dann werden wir von *Phasenresonanz* sprechen. Der nachfolgende Screenshot zeigt eine solche Phasenresonanz.



Bei einem Messwiderstand von 1 kΩ wurden im Bereich bis 1 MHz drei Phasenresonanzen gefunden. Die Resonanzfrequenzen und die entsprechenden Verhältnisse aus Gesamtspannung zur Spannung am Messwiderstand sind nachfolgend aufgelistet:

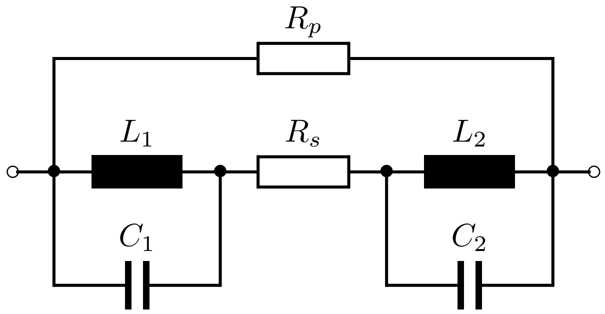
167 kHz	...	81.9
427 kHz	...	3.5
489 kHz	...	9.9

Bis 167 kHz wirkt die Spule induktiv, zwischen 167 kHz und 427 kHz kapazitiv, danach bis 489 kHz wiederum induktiv. Ab 489 kHz zeigt die Spule nur mehr kapazitives Verhalten. Diese Daten legen nahe, dass die Resonanz bei 427 kHz anders geartet ist als die beiden anderen.
Da ein 1:10 Tastkopf verwendet wurde, kann ein möglicher Einfluss der Eingangsimpedanz des Oszilloskops auf das Verhalten der Spule vernachlässigt werden. (Vergleicht man nämlich die Messresultate mit jenen, die ohne Tastkopf erzielt wurden, dann findet man relative Abweichungen im einstelligen Prozentbereich, die sich auch durch normale Messfehler erklären lassen.)
Die Serienschaltung aus Messwiderstand und Spule wirkt wie ein Spannungsteiler, bei dem sich Gesamtspannung zur Spannung am Messwiderstand so wie Gesamtimpedanz zum Messwiderstand verhalten. Damit wird die Impedanz der Spule bei Phasenresonanz rein reell:

Resonanzfrequenz	...	Widerstand der Spule
167 kHz	...	80.9 kΩ
427 kHz	...	2.5 kΩ
489 kHz	...	8.9 kΩ

Hätten wir nur eine Resonanz gefunden, dann würden wir die Spule durch einen Parallelschwingkreis, bestehend aus einer Induktivität L und einer Kapazität C beschreiben. Um einen Gleichstromwiderstand zu erfassen, müssten wir zu diesem Parallelschwingkreis noch einen Widerstand R_s in Serie schalten. Da aber ein Parallelschwingkreis bei seiner Resonanzfrequenz einen unendlich großen Widerstand darstellt, benötigen wir für endliche Widerstandswerte noch einen zur beschriebenen Serienschaltung parallel geschalteten Widerstand. Dieser Parallelwiderstand R_p darf nun ruhig frequenzabhängig sein, da er lediglich dielektrische Verluste und Verluste, welche durch elektromagnetische Abstrahlung entstehen, wiedergibt. Ist diese Interpretation von R_p richtig, dann sollte der Parallelwiderstand eine monoton fallende Funktion der Frequenz sein. (Bei Gleichstrom müsste R_p unendlich groß sein.) Dagegen wird der Serienwiderstand R_s monoton mit der Frequenz wachsen, da er die ohmschen Verluste und damit den Skin– und Proximity–Effekt beinhaltet.
Für den vorliegenden Fall der drei Resonanzfrequenzen reichen zwei Parallelschwingkreise vollkommen aus, da die Serienschaltung zweier Parallelschwingkreise auch ein, dem Serienschwingkreis ähnliches, Resonanzverhalten zeigen kann. Damit kann die Resonanz bei 427 kHz modelliert werden, sodass sich der Widerstand von 2.5 kΩ als Parallelschaltung von R_s und R_p ergibt.
Hier liegt auch der große Unterschied zu den gängigen Untersuchungen zu Eigenresonanzen von Spulen. Diese begnügen sich mit nur einer Resonanz und modellieren daher die Spule durch eine Serienschaltung aus Induktivität und Widerstand, der eine Kapazität parallel geschaltet ist [2]. Mit so einer Ersatzschaltung könnten wir aber unmöglich die gemessene Resonanz bei 489 kHz beschreiben. Weiters lässt das Fehlen eines Parallelwiderstandes das Erkennen der physikalischen Unterschiede der einzelnen Verluste nicht zu. So darf es nicht verwundern, dass elektromagnetische Abstrahlung der Spule praktisch nie thematisiert wird, obwohl doch *alle beschleunigten Ladungen strahlen.*

Unsere Überlegungen legen dagegen folgendes Ersatzschaltbild nahe:



Im Folgendem wird mit ω die Kreisfrequenz bezeichnet. Mit den Abkürzungen

$$A = \left(1 - \omega^2 L_1 C_1\right)\left(1 - \omega^2 L_2 C_2\right) \quad \text{und} \quad B = \omega L_1 \left(1 - \omega^2 L_2 C_2\right) + \omega L_2 \left(1 - \omega^2 L_1 C_1\right)$$

erhält man für den Real– und Imaginärteil der Impedanz Z die Ausdrücke:

$$\Re(Z) = R_p \cdot \frac{R_s(R_p + R_s)A^2 + B^2}{(R_p + R_s)^2 A^2 + B^2} \qquad \Im(Z) = R_p^2 \cdot \frac{AB}{(R_p + R_s)^2 A^2 + B^2}$$

Phasenresonanz liegt vor, wenn der Imaginärteil verschwindet. Damit erhalten wir drei Resonanzfrequenzen und die entsprechenden Impedanzen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1}} \quad \to \quad Z_1 = R_p$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 (C_1 + C_2)}} \quad \to \quad Z_m = \frac{R_p \cdot R_s}{R_p + R_s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L_2 C_2}} \quad \to \quad Z_2 = R_p$$

Wir identifizieren diese drei Kreisfrequenzen mit den gemessenen Resonanzfrequenzen:

$$\omega_1 = 1.05 \cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1} \qquad \omega_m = 2.68 \cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1} \qquad \omega_2 = 3.07 \cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$$

Mit den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 lassen sich die beiden Kapazitäten C_1 und C_2 durch die Induktivitäten L_1 und L_2 ausdrücken. Dies eingesetzt in die Gleichung für ω_m liefert eine in L_1 und L_2 lineare Gleichung. Da für kleine Frequenzen die Wirkung der Kapazitäten vernachlässigt werden kann, muss die Summe der beiden Induktivitäten mit der Nenninduktivität der Spule übereinstimmen. So ergibt sich

$$L_1 + L_2 = 9\,\mathrm{mH}$$

als weitere lineare Gleichung. Die Lösung dieses Gleichungssystems führt auf:

$$L_1 = 8.63\,\mathrm{mH} \qquad L_2 = 0.37\,\mathrm{mH} \qquad C_1 = 105.2\,\mathrm{pF} \qquad C_2 = 286.3\,\mathrm{pF}$$

Für die Frequenzabhängigkeit des Parallelwiderstandes wählen wir einen Potenzansatz und finden mit

$$\frac{80.9\,\mathrm{k\Omega}}{8.9\,\mathrm{k\Omega}} = \left(\frac{489\,\mathrm{kHz}}{167\,\mathrm{kHz}}\right)^{2.0544}$$

in guter Näherung:

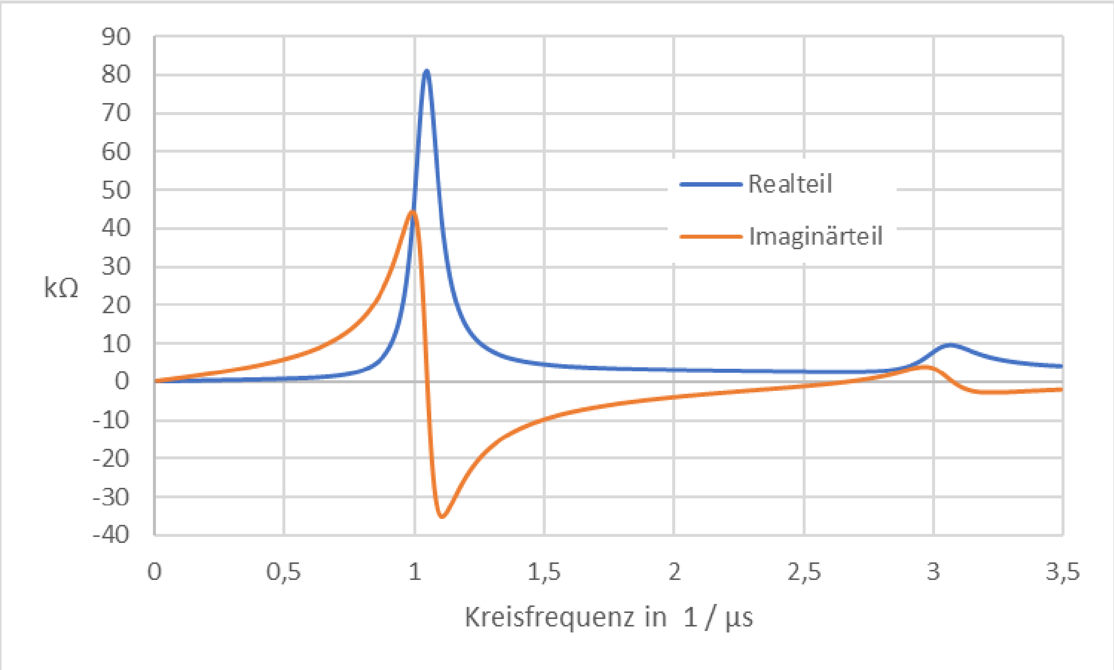
$$R_p(\omega) = 80.9\,\mathrm{k\Omega} \cdot \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2$$

Ob nun $R_p \propto \omega^{-2}$ ein Hinweis auf elektromagnetische Abstahlung ist, lässt sich auf Grund der bescheidenen Datenmenge nicht eindeutig beantworten.
Da vom Serienwiderstand R_s nur der Wert bei der Kreisfrequenz ω_m, nämlich

$$R_s(\omega_m) = \frac{2.5\,\mathrm{k\Omega} \cdot R_p(\omega_m)}{R_p(\omega_m) - 2.5\,\mathrm{k\Omega}} \approx 3.1\,\mathrm{k\Omega}$$

bekannt ist, werden wir einen linearen Ansatz wählen und den kleinen Gleichstromwiderstand vernachlässigen:

$$R_s(\omega) = 3.1\,\mathrm{k\Omega} \cdot \frac{\omega}{\omega_m}$$



Obige Abbildung zeigt den Real– und Imaginärteil der modellierten Impedanz der untersuchten Spule.

Literatur:
[1] Taschenbuch Elektrotechnik, Band 3, VEB Verlag Technik, Berlin 1988. Seite 275
[2] www.elektroniktutor.de/bauteilkunde/spule.html (abgerufen am 20.03.2020)