Zum LOTKA–VOLTERRA–Modell

Johannes Barton, Wien 2008

Dieses Modell wurde ursprünglich zur Erklärung zeitlicher Oszillationen von Fischpopulationen in der Adria entworfen. In verschiedenen Lehrbüchern wird es als Beispiel für eine gelungene mathematische Modellbildung angeführt. An dieser Stelle soll es kurz erklärt aber auch kritisiert werden.

Es werden eine Räuberpopulation R und eine Beutepopulation B betrachtet. Deren zeitliche Entwicklung wird durch die beiden Differentialgleichungen

$$B' = a \cdot B - c \cdot R \cdot B \qquad \text{und} \qquad R' = f \cdot B \cdot R - g \cdot R$$

beschrieben. Darin sind a, c, f und g positive Konstanten. Das Apostroph gibt die erste Ableitung nach der Zeit t an.

Die Nichtlinearitäten in diesem Gleichungssystem kommen dadurch zustande, dass die Vernichtungsrate der Beutetiere proportional zur Anzahl der Räuber und die Zuwachsrate der Räuber proportional zur Anzahl der Beutetiere sein wird. Dieser Ansatz erscheint derart plausibel, dass er nur selten hinterfragt wird.

Bei einer Gleichung der Form $X' = q \cdot X$ hat q die Bedeutung einer mittleren, auf das Individuum bezogenen Rate. Ist nun diese Rate proportional zu einem bestimmten Nahrungsangebot N, dann entfällt auf das einzelne Individuum im Mittel der Anteil N/X, sodass X' konstant ist. Ein ähnliches Argument gilt auch für die Vernichtung der Beutetiere. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Beutetier gefressen wird, ist proportional zur Anzahl der Räuber, welche im Mittel auf ein Beutetier entfallen.

Mit diesen Argumenten kommen wir zu einem wesentlich realistischeren Räuber – Beute – Modell, welches zusätzlich den Vorteil der Linearität aufweist, und daher exakt lösbar ist:

$$B' = a - c \cdot R \qquad \text{und} \qquad R' = f \cdot B - g \cdot R$$

Differenzieren der zweiten Gleichung und Einsetzen der ersten, liefert:

$$R'' + g \cdot R' + c \cdot f \cdot R = a \cdot f$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Lösungen in jeder besseren Formelsammlung angegeben sind. Da der Parameter g als positiv vorausgesetzt wird, ist der stationäre Wert a/c in jedem Fall asymptotisch stabil. Für $g^2 < 4 \cdot c \cdot f$ ergeben sich daher gedämpfte Schwingungen um a/c. Dies ist auch der große Unterschied zum ursprünglichen Lotka–Volterra–Modell. Bei diesem ist nämlich der relevante Fixpunkt nicht asymptotisch stabil, sodass die Oszillationen ohne Dämpfung fortwährend weitergehen, ein Phänomen, welches in der Natur doch eher die Ausnahme darstellt.

Anmerkungen:
Die Lösungen für die Beute lassen sich analog zu jener der Räuber ermitteln.
Wie bei jedem Modell ist auch hier auf die Sinnhaftigkeit zu achten. So ist zum Beispiel die Berechnung abzubrechen, wenn B oder R nicht mehr positiv sind.
Das Modell lässt sich um einen Term $h \cdot B$, welcher eine konstante Vermehrungsrate der Beutetiere berücksichtigt, erweitern ohne die Linearität zu zerstören.