

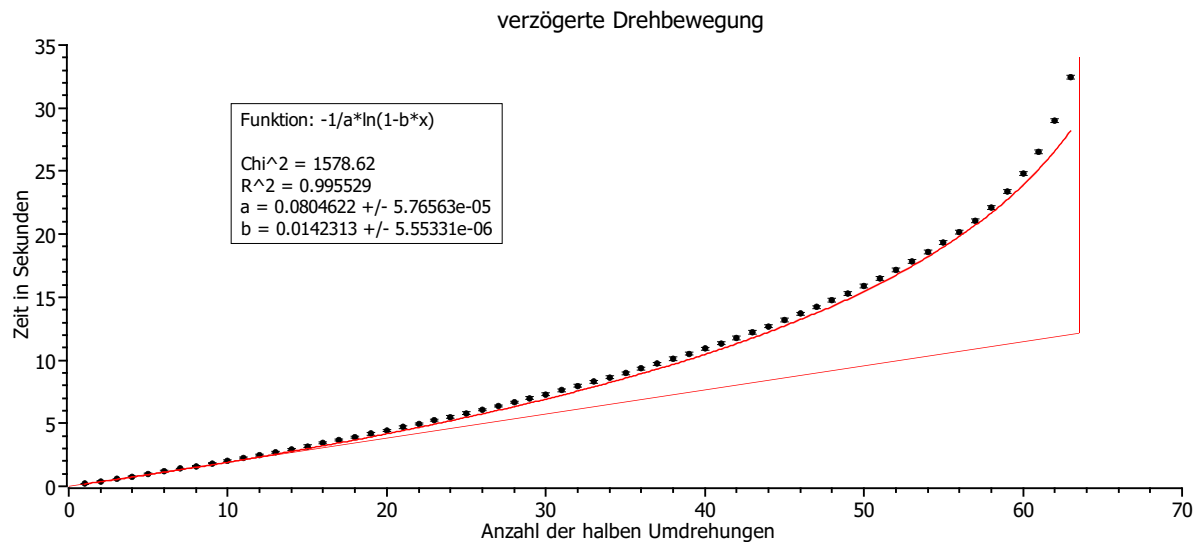
Der Reibung auf der Spur

Im alltäglichen Leben begegnen wir praktisch bei jedem Bewegungsvorgang dem Phänomen der Reibung. Wie stark solche Reibungseinflüsse von der Geschwindigkeit abhängen, soll dieser Artikel anhand eines einfachen Experiments mit einer durchaus anspruchsvollen Auswertung klären.

Das Experiment

Bei diesem Experiment wird eine Drehbewegung analysiert, indem eine Stange, die auf einem Drehlager montiert ist, angestoßen wird und mehrmals durch eine Lichtschranke rotiert. Damit tritt die zeitliche Dauer als Funktion von der Anzahl an halben Umdrehungen auf. Dieser funktionale Zusammenhang ist durchaus sinnvoll, da die Abszissenwerte eine reine Zählvariable darstellen und daher keine Unsicherheiten aufweisen. Damit wird es möglich, standardmäßige Fitroutinen, die nur Unsicherheiten der Ordinatenwerte berücksichtigen, zu verwenden. Die Unsicherheit für eine einzelne Zeitmessung wird auf 0.02 s geschätzt. Da die verstrichene Zeit als Summe der für eine halbe Umdrehung benötigten Einzelzeiten gemessen wird, kann nach *Gauß* die Unsicherheit der Gesamtzeit durch $\sqrt{x} \cdot 0.02$ s angegeben werden, falls mit x die Anzahl der halben Umdrehungen bezeichnet wird.

Die Reibung führt dazu, dass der Stab immer langsamer wird und in endlicher Zeit zum Stillstand kommt. Im vorliegenden Versuch konnten 63 halbe Umdrehungen in einem Zeitraum von etwas mehr als einer halben Minute gemessen werden. In der nachfolgenden Grafik sind die Datenpunkte schwarz dargestellt, wobei die Fehlerbalken so klein sind, dass sie praktisch nicht erkennbar sind. Die rot gezeichnete ansteigende Gerade gibt den hypothetischen Verlauf wieder, welcher bei einer komplett reibungsfreien Bewegung resultieren würde. Die vertikale Linie markiert dagegen den geschätzten Stillstand.



Die Auswertung

Ein, ob seiner einfachen mathematischen Beherrschbarkeit, beliebter Ansatz ist eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft. Mit den Bezeichnungen x für die Anzahl an halben Umdrehungen, v für die Winkelgeschwindigkeit geteilt durch π und t für die Zeit entspricht dieser Ansatz den Differentialgleichungen

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dt} = -av$$

mit a als positive Konstante. Die relevante Lösung der obigen Differentialgleichungen mit der ‘‘Anfangsgeschwindigkeit’’ u lautet:

$$t = -\frac{1}{a} \ln \left(1 - \frac{ax}{u} \right) \quad (1)$$

In obiger Abbildung ist diese Funktion an die Datenpunkte angepasst. Allerdings ist diese Anpassung nicht sehr befriedigend. Das liegt wohl daran, dass bei diesem Ansatz die Bewegung in endlicher Zeit nicht zum Stillstand kommt.

Ein möglicher anderer Ansatz, bei dem eine explizite Lösung der Form $t(x)$ gefunden werden kann, wäre

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dt} = -pv^2 - q$$

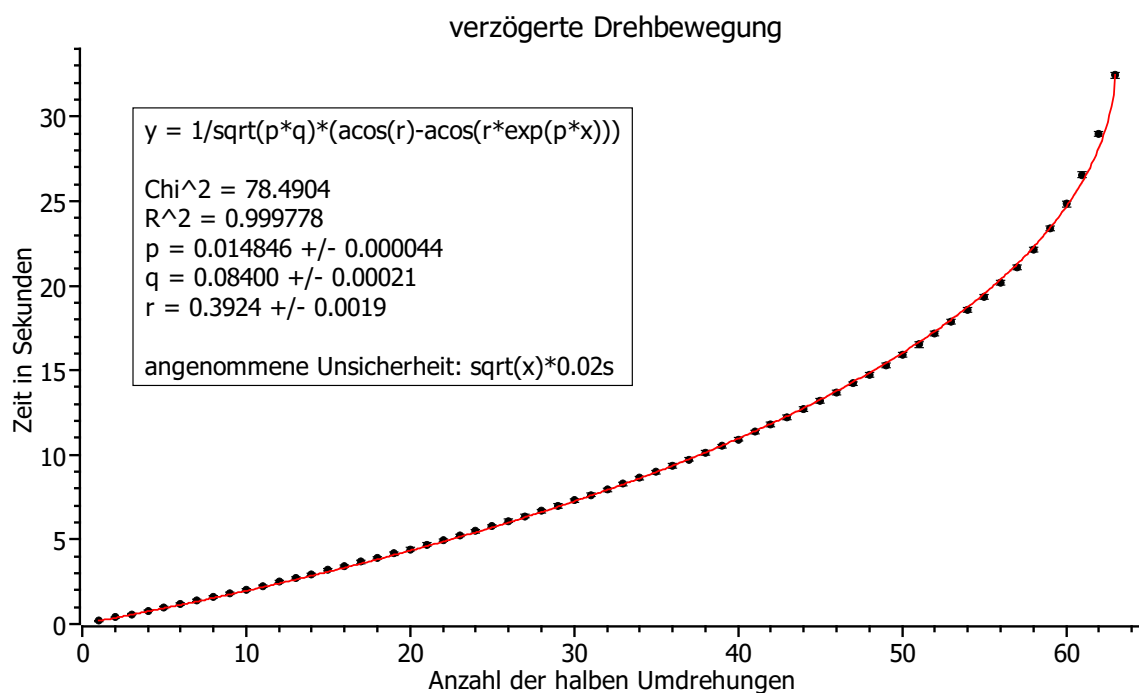
mit einem positiven Parameter p und einem weiteren Parameter q , der nur für positive ‘‘Geschwindigkeiten’’ ungleich Null ist. Die relevante Lösung lautet:

$$t = \frac{1}{\sqrt{pq}} (\operatorname{acos}(r) - \operatorname{acos}(r \cdot \exp(px))) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{\frac{q}{q + pu^2}} \quad (2)$$

In diesem Ansatz kommt die Bewegung nach der Zeit

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{pq}} \operatorname{atan} \left(\sqrt{\frac{p}{q}} u \right)$$

zum Stillstand.



Mit diesem Fit scheint eine optimale Anpassung gelungen zu sein. Der χ^2 -Wert dividiert durch den ‘‘Degree of Freedom’’ von 60 liefert einen Wert von rund 1.3, der nahe genug bei 1 liegt, um anzunehmen, dass das Modell

$$\frac{dv}{dt} = -pv^2 - q \quad \text{für} \quad v > 0$$

mit

$$p = (0.014846 \pm 0.000044) \quad \text{und} \quad q = (0.08400 \pm 0.00021) \text{ s}^{-2}$$

den Bewegungsvorgang bei diesem Experiment recht gut beschreibt.

Um andere Reibungsansätze ausprobieren zu können, sind die Rohdaten angegeben:
(Halbe Umdrehungen) (Gesamtzeit / s) (Zeit für die halbe Umdrehung / s)

1.000000	0.190981	0.190981
2.000000	0.384757	0.193776
3.000000	0.581267	0.196510
4.000000	0.780634	0.199366
5.000000	0.982856	0.202222
6.000000	1.188177	0.205321
7.000000	1.396536	0.208359
8.000000	1.608177	0.211641
9.000000	1.822917	0.214740
10.000000	2.041059	0.218142
11.000000	2.262483	0.221424
12.000000	2.487613	0.225130
13.000000	2.716146	0.228533
14.000000	2.948628	0.232483
15.000000	3.184696	0.236068
16.000000	3.424957	0.240260
17.000000	3.669167	0.244210
18.000000	3.917873	0.248707
19.000000	4.170894	0.253021
20.000000	4.428594	0.257700
21.000000	4.690729	0.262135
22.000000	4.957908	0.267179
23.000000	5.229887	0.271979
24.000000	5.507396	0.277509
25.000000	5.790009	0.282613
26.000000	6.078759	0.288750
27.000000	6.373464	0.294705
28.000000	6.674913	0.301450
29.000000	6.982561	0.307648
30.000000	7.297257	0.314696
31.000000	7.619002	0.321745
32.000000	7.948403	0.329401
33.000000	8.285217	0.336814
34.000000	8.630964	0.345747
35.000000	8.984974	0.354010
36.000000	9.350104	0.365130
37.000000	9.726962	0.376858
38.000000	10.114575	0.387613
39.000000	10.512457	0.397882
40.000000	10.922734	0.410278
41.000000	11.345043	0.422309
42.000000	11.780903	0.435859
43.000000	12.233594	0.452691
44.000000	12.702023	0.468429
45.000000	13.186007	0.483984
46.000000	13.688464	0.502457
47.000000	14.208663	0.520200
48.000000	14.749583	0.540920
49.000000	15.311163	0.561580
50.000000	15.899601	0.588437
51.000000	16.513377	0.613776
52.000000	17.159783	0.646406
53.000000	17.846597	0.686814
54.000000	18.572847	0.726250
55.000000	19.342726	0.769878
56.000000	20.182908	0.840182
57.000000	21.083368	0.900460
58.000000	22.133550	1.050182
59.000000	23.392821	1.259271
60.000000	24.825391	1.432569
61.000000	26.554245	1.728854
62.000000	28.986806	2.432561
63.000000	32.437526	3.450720